

# Perustilan fotonit

Taneli Tolppanen

LuK-tutkielma  
Fysiikan koulutusohjelma  
Teoreettinen fysiikka  
Oulun yliopisto  
2019

## Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kubitti ja harmoninen värähtelijä</b>	<b>3</b>
2.1	Kubitti . . . . .	3
2.2	Harmoninen värähtelijä . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Kubitin ja harmonisen värähtelijän kytkentä</b>	<b>6</b>
3.1	KytKentä . . . . .	6
3.2	Hamiltonin operaattori matriisina . . . . .	7
3.3	Systeemin ominaisenergiat ja perustila . . . . .	8
3.4	Rotating wave -approksimaatio . . . . .	11
3.4.1	Ominaisenergiat ja perustila . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Perustilan kokeellinen tutkiminen</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Loppupäätelmät</b>	<b>18</b>

## Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa tutustutaan kubitin ja kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän teoriaan ja erityisesti näiden väliseen vuorovaikutukseen. Kubitin ja harmonisen värähtelijän kytkeminen toisiinsa muodostaa niistä systeemin, jonka perustilassa voidaan havaita fotoneita. Tutkielmassa perustellaan tämä tulos teoreettisesti, sekä lasketaan systeemin ominaisenergiat. Lopuksi esitetään tapa, miten systeemin perustilaa olisi mahdollista tutkia kokeellisesti ns. mittauskubitin avulla.

## 1 Johdanto

Kubitti ja harmoninen värähtelijä ovat tärkeitä malleja kvanttimekaniikassa. Niiden teoriaa voidaan soveltaa moneen eri systeemiin. Kytkeällä kubitti harmoniseen värähtelijään saadaan aikaan uusi systeemi, jolla on mielenkiintoisia ominaisuuksia. Nykyään tällaisia systeemejä voidaan rakentaa ja kokeellisesti tutkia esim. suprajohtavien sähköpiirien avulla, joten toisiinsa kytketty kubitti ja harmoninen värähtelijä ei ole pelkkää teoriaa. Toisiinsa vahvasti kytkettyä kubittia ja harmonista värähtelijää voidaan soveltaa esim. kvantti-informaatiassa. Lähivuosina kiinnostus alaan on ollut kasvussa [1]. Kun kubitti ja harmoninen värähtelijä ovat vahvasti kytkettynä toisiinsa, voi niiden muodostaman systeemin perustilassa olla fotoneita. Tutkielman tarkoitus on esitellä tämä ilmiö teoreettisesti, sekä esittää mahdollinen tapa sen kokeelliselle tutkimiselle.

Tutkielma pohjautuu pääasiassa lähteisiin [2–4]. Kirjassa D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* [2] käydään läpi kvanttimekaniikan perusteita. Se antaa pohjan kubitin ja harmonisen värähtelijän teorialle. Erkki Thunebergin kirjoittamassa luentomonisteessa *Quantum Optics in Electric Circuits* [3] esitellään ja johdetaan malli kubitin ja harmonisen värähtelijän väliselle kytkennälle. Tutkimuksessaan *Ancillary Qubit Spectroscopy of Vacua in Cavity and Circuit Quantum Electrodynamics* [4] Lolli et al., kertovat miten toisiinsa kytketyn kubitin ja harmonisen värähtelijän perustilan fotoneita olisi mahdollista tutkia.

Tutkielmassa aluksi tutustutaan kubitin ja harmonisen värähtelijän teoriaan. Tämän jälkeen tutustutaan näiden väliseen kytkentään. Tässä kappaleessa osoitetaan, miten systeemin ominaisenergiat muuttuvat kytkennän takia, ja osoitetaan systeemin perustilan fotonipopulaation olemassaolo. Lopuksi käydään läpi tutkimusta [4], joka esittää yhden mahdollisen tavan tällaisen systeemin perustilan kokeelliseen tutkimiseen.

## 2 Kubitti ja harmoninen värähtelijä

Tässä kappaleessa käydään läpi tämän työn kannalta oleellista teoriaa kubitista ja harmonisesta värähtelijästä. Tarkoitus on tutustua näihin lyhyesti ja antaa tarvittavat työkalut kubitin ja harmonisen värähtelijän muodostaman systeemin tutkimiseen. Yleisesti, koska kubitin teoriaa voidaan soveltaa mihin tahansa systeemiin, jolla on kaksi mahdollista tilaa, ja harmonisen värähtelijän teoria yleistyy kaikkiin pienellä amplitudilla värähteleviin systeemeihin, näistä on hyvä olla tietoinen. Tämä kappale perustuu kirjan [2] kappaleisiin 2.3 ja 9.1.

### 2.1 Kubitti

Kvanttimekaniikassa kubitilla tarkoitetaan systeemiä, jolla on kaksi stationaarista tilaa. Merkitään tällaisen systeemin perustilaa symbolilla  $|a\rangle$  ja virittynyttä tilaa symbolilla  $|b\rangle$ . Näillä tiloilla on energiat  $E_a$  ja  $E_b$ :

$$H |a\rangle = E_a |a\rangle, \quad (1)$$

$$H |b\rangle = E_b |b\rangle. \quad (2)$$

Käyttämällä ominaistilojen

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |b\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

määrittämää ortonormaalista kantaa voidaan kubitin Hamiltonin operaattori esittää matriisina

$$H = \begin{pmatrix} E_b & 0 \\ 0 & E_a \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Tätä esitystä voi yksinkertaistaa siirtämällä kubitin energian nollakohta ominaisenergioiden  $E_a$  ja  $E_b$  keskiarvoon. Merkitään nyt näiden tilojen energiaeroa  $\hbar\omega_0 = E_b - E_a$ . Tämän avulla voidaan qubitin Hamiltonin operaattori esittää seuraavasti

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z, \quad (5)$$

jossa  $\sigma_z$  on yksi Paulin matriiseista. Paulin matriisit ovat

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Havaitaan, että

$$\sigma_x |a\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |b\rangle.$$

Vastaavasti  $\sigma_x |b\rangle = |a\rangle$ . Eli  $\sigma_x$  on operaattori, joka laskee tai nostaa kubitin tilaa. Operaattori  $\sigma_x$  voidaan esittää kubitin nosto- ja laskuoperaattoreiden  $\sigma_+$  ja  $\sigma_-$  avulla:

$$\sigma_x = \sigma_+ + \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Esimerkiksi elektronin spin voidaan tulkita kubitiksi ja sen käsittelyyn voidaan käyttää kubitin teoriaa. Kubittia voidaan käyttää esimerkiksi kvanttietokoneissa, jossa normaalin tietokoneen bitti on korvattu kvanttimekaanisella kubitilla. Tärkeä ero kubitin ja tavallisen bitin välillä on se, että kubitin käytöllä voidaan hyödyntää kvanttimekaanisia ilmiöitä, jotka mahdollistavat erilaisia kvanttialgoritmeja [5]. Esimerkiksi Groverin ja Shorin algoritmit ovat mahdollisia kvanttimekaniikan takia ja ne ovat nopeampia kuin niiden klassiset vastineet. Groverin algoritmi on hakualgoritmi ja Shorin algoritmi jakaa luvun alkutekijöihinsä. Lukujen alkutekijöitä käytetään salauksessa, joten kvanttietokoneilla olisi sovellutuksia kryptografiassa.

## 2.2 Harmoninen värähtelijä

Klassisesti harmonisen värähtelijän potentiaalienergia on muotoa  $V = kx^2/2$ , jossa  $k$  on jousivakio. Kappaleen, joka kokee tällaisen potentiaalin, kokonaisenergia on summa sen kineettisestä- ja potentiaalienergiasta  $T + V = p^2/2m + kx^2/2$ , missä  $m$  on kappaleen massa. Tästä päästään kvanttimekaaniseen muotoon muuttamalla  $p$  ja  $x$  niitä vastaaviin operaattoreihin  $\hat{p}$  ja  $\hat{x}$ . Merkitään jatkossa operaattoreita ilman hattua, niinkuin aiemmin tekstissä. Harmonisen värähtelijän Hamiltonin operaattori voidaan kirjoittaa muotoon

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (8)$$

jossa jousivakion  $k$  tilalla on käytetty värähtelyn kulmataajuutta  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Tästä saadaan kirjallisuudesta tutumpi muoto määrittelemällä uudet operaattorit  $a$  ja  $a^\dagger$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(ip + m\omega x), \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-ip + m\omega x). \quad (10)$$

Näitä hyödyntäen voidaan harmonisen värähtelijän Hamiltonin operaattori kirjoittaa muodossa

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (11)$$

Sijoittamalla  $a$  ja  $a^\dagger$  kaavaan (11) ja sieventämällä päästään takaisin kaavaan (8). Oleellisesti tässä ei ole siis tehty mitään muuta kuin määrittelyjä. Kuitenkin kaava (11) on kätevää muotoa, sillä näillä uusilla operaattoreilla,  $a$  ja  $a^\dagger$ , on käytännöllisiä ominaisuuksia.

Samoin kuin kubitilla, harmonisella värähtelijällä on stationaarisia tiloja. Merkitään tällaista tilaa  $|n\rangle$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots \infty$ . Näihin tiloihin liittyy energia

$$H |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (12)$$

Kvanttimekaanisen harmonisen värähtelijän energiatilat ovat kvantittuneet ja sillä on energiaa jopa tilassa  $|0\rangle$ . Tätä kutsutaan nollapistevärähtelyksi. Tässä ei ole tarkemmin johdettu, miksi harmonisen värähtelijän energiat voidaan esittää tässä muodossa. On kuitenkin hyvä tietää, että tämä esitys on mahdollista  $a$  ja  $a^\dagger$  ansiosta.

Operaattoreita  $a$  ja  $a^\dagger$  kutsutaan lasku-  $a$  ja nosto-operaattoriksi  $a^\dagger$ , sillä ne joko laskevat tai nostavat harmonisen värähtelijän tilaa:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (13)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (14)$$

On vielä hyvä huomata, että  $a |0\rangle = 0$  ja  $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ .

Esimerkiksi sähkömagneettisen aallon moodit voidaan tulkita harmoniseksi värähtelijäksi [3]. Joka tapauksessa, tutkimalla yleisesti potentiaalin  $V(x)$  Taylorin sarjaa nähdään, että pienillä värähtelyillä tasapainopisteen ympärillä, mitä tihentä oskilloivaa liikettä voidaan käsitellä harmonisena värähtelijänä. Tämän takia harmonisen värähtelijän teoria on tärkeä.

### 3 Kubitin ja harmonisen värähtelijän kytkentä

Tässä kappaleessa perehdytään tutkielman pääaiheeseen: toisiinsa vahvasti kytkettyyn kubittiin ja harmoniseen värähtelijään. Tarkoitus on ratkaista tällaisen systeemin ominaisenergiat sekä perustilaa vastaava ominaistila. Kappaleessa esitellään systeemin Hamiltonin operaattori, ratkaistaan sitä kuvaava matriisi ja näytetään, kuinka kytkentä vaikuttaa systeemin ominaisenergioihin ja perustilaan. Lopputuloksena huomataan, että koko systeemin perustila ei välttämättä ole tila  $|a\rangle|0\rangle$ , eli tila jossa molemmat systeemin osat ovat omissa perustiloissaan.

#### 3.1 Kytkentä

Kun kubitti ja harmonien värähtelijä ovat kytkettynä toisiinsa, pystyvät ne vuorovaikuttamaan keskenään. Kubitin tilan muuttuminen vaikuttaa harmonisen värähtelijän tilaan ja toisinpäin. Toisiinsa kytketyn kubitin ja harmonisen värähtelijän muodostaman systeemin Hamiltonin operaattori [3] on

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \hbar g\sigma_x(a + a^\dagger), \quad (15)$$

jossa  $g$  on kytkentävakio, joka kuvaa kubitin ja harmonisen värähtelijän vuorovaikutuksen voimakkuutta. Esittämällä Hamiltonin operaattori matriisina voidaan ratkaista sen ominaisarvot ja ominaistilat. Matriisin ominaisarvot ovat systeemin mahdollisia energia-arvoja ja ominaistilat mahdollisia stationaarisia tiloja. Ennen tätä on kuitenkin hyvä miettiä, miten systeemin tilat voidaan esittää. Kubitti voi olla joko perustilassa  $|a\rangle$  tai virittyneessä tilassa  $|b\rangle$  ja harmoninen värähtelijä voi olla jossain  $|n\rangle$  tilassa,  $n = 0, 1, 2, \dots \infty$ . Tällöin koko systeemi voi olla tilojen  $|an\rangle$  ja  $|bn\rangle$  superpositiossa. Tilat  $|an\rangle$  ja  $|bn\rangle$  muodostavat siis systeemille kannan [3], jonka avulla voidaan esittää Hamiltonin operaattoria kuvaava matriisi. Ilman kytkentää "systeemin"energia-arvot olisivat summia kubitin ja harmonisen värähtelijän energioista ja stationaariset tilat olisivat tiloja  $|an\rangle$  tai  $|bn\rangle$ . Kytkemätön systeemi voidaan käsitellä toisistaan kokonaan irrallisina kubittina ja harmonisena värähtelijä, joten on turha kutsua sitä systeemiksi. Kytkentä tekee kubitista ja harmonisesta värähtelijästä systeemin.

Tutkitaan vielä, miten Hamiltonin operaattori (15) operoi tilaan  $|bn\rangle$ :

$$\begin{aligned} H|bn\rangle &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z|bn\rangle + \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})|bn\rangle - \hbar g\sigma_x(a + a^\dagger)|bn\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2}|bn\rangle + \hbar\omega(n + \frac{1}{2})|bn\rangle - \hbar g(\sqrt{n}|an-1\rangle + \sqrt{n+1}|an+1\rangle). \end{aligned}$$

Paulin matriisit  $\sigma_z$  ja  $\sigma_x$  operoivat suoraan kubitin ominaistiloihin. Harmoniseen värähtelijään liittyvät operaattorit  $a$  ja  $a^\dagger$  operoivat suoraan harmonisen värähte-

lijän ominaistiloihin. Havaitaan, että tila  $|bn\rangle$  ei ole toisiinsa kytketyn kubitin ja harmonisen värähtelijän ominaistila.

### 3.2 Hamiltonin operaattori matriisina

Edellisessä kappaleessa esiteltiin systeemiä kuvaava Hamiltonin operaattori ja sille kannan muodostavat tilat. Tässä kappaleessa muodostetaan Hamiltonin operaattoria kuvaava matriisi. Vielä kertauksena, Hamiltonin operaattori täytyy esittää matriisina, jotta lopulta päästään käsiksi systeemin energioihin ja tiloihin. Yleisesti Hamiltonin operaattoria kuvaavan matriisin elementit saadaan kaavalla

$$H_{ij} = \langle i | H | j \rangle, \quad (16)$$

jossa  $|i\rangle$  ja  $|j\rangle$  kuuluvat tutkittavan systeemin kantaan. Edelliseen kappaleeseen nojaten  $|i\rangle$  ja  $|j\rangle$  ovat tiloja  $|an\rangle$  ja  $|bn\rangle$ . Tehdään vielä merkintä  $|a/b\rangle$  kubitin tilalle. Tässä  $|a/b\rangle$  on joko tila  $|a\rangle$  tai tila  $|b\rangle$ . Tämän avulla on helpompi ratkaista matriisielementit (16). Nyt kaavaan (16) sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} H_{a/bn',bn} &= \langle a/bn' | H | bn \rangle \\ &= \langle a/bn' | \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z | bn \rangle + \langle a/bn' | \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) | bn \rangle \\ &\quad - \langle a/bn' | \hbar g \sigma_x (a + a^\dagger) | bn \rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \langle a/bn' | bn \rangle + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \langle a/bn' | bn \rangle \\ &\quad - \hbar g \langle a/bn' | \sigma_x (\sqrt{n} | bn - 1 \rangle + \sqrt{n+1} | bn + 1 \rangle) \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \delta_{a/bb} \delta_{n'n} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \delta_{a/bb} \delta_{n'n} \\ &\quad - \hbar g \langle a/bn' | (\sqrt{n} | an - 1 \rangle + \sqrt{n+1} | an + 1 \rangle) \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \delta_{a/bb} \delta_{n'n} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \delta_{a/bb} \delta_{n'n} \\ &\quad - \hbar g \sqrt{n} \langle a/bn' | an - 1 \rangle - \hbar g \sqrt{n+1} \langle a/bn' | an + 1 \rangle \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \delta_{a/bb} \delta_{n'n} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \delta_{a/bb} \delta_{n'n} \\ &\quad - \hbar g \sqrt{n} \delta_{a/ba} \delta_{n'n-1} - \hbar g \sqrt{n+1} \delta_{a/ba} \delta_{n'n+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Vastaavalla päättelyllä saadaan

$$\begin{aligned} H_{a/bn',an} &= -\frac{\hbar\omega_0}{2} \delta_{a/ba} \delta_{n'n} + \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \delta_{a/ba} \delta_{n'n} \\ &\quad - \hbar g \sqrt{n} \delta_{a/bb} \delta_{n'n-1} - \hbar g \sqrt{n+1} \delta_{a/bb} \delta_{n'n+1}. \end{aligned} \quad (18)$$



Kaavoja (17) ja (18) käyttämällä voidaan laskea Hamilton operaattorin matriisielementit. Lasketaan esimerkiksi  $H_{a0,b1}$  käyttäen kaavaa (17)

$$\begin{aligned} H_{a0,b1} &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\delta_{ab}\delta_{01} + \hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\right)\delta_{ab}\delta_{01} - \hbar g\sqrt{1}\delta_{aa}\delta_{01-1} - \hbar g\sqrt{1+1}\delta_{aa}\delta_{01+1} \\ &= -\hbar g. \end{aligned}$$

Lopulta matriisista saadaan seuraavan muotoinen

$$\frac{H}{\hbar} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\omega}{2} + \frac{\omega_0}{2} & -g & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -g & \frac{3\omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} & 0 & 0 & -g\sqrt{2} & \dots \\ -g & 0 & 0 & \frac{3\omega}{2} + \frac{\omega_0}{2} & -g\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -g\sqrt{2} & \frac{5\omega}{2} - \frac{\omega_0}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -g\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{5\omega}{2} + \frac{\omega_0}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (19)$$

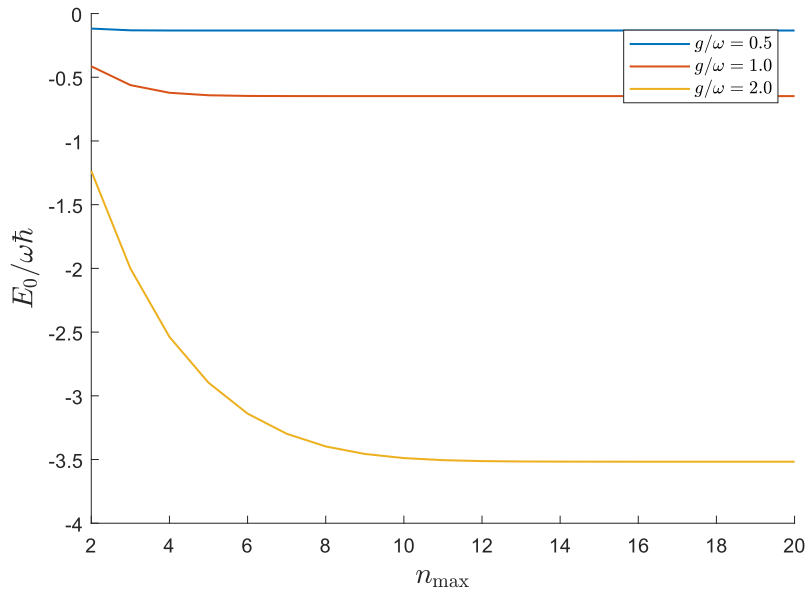
Matriisin diagonaalilla on kytkemättömän systeemin ominaisenergiat. Muut termit tulevat kytkennästä.

### 3.3 Systeemin ominaisenergiat ja perustila

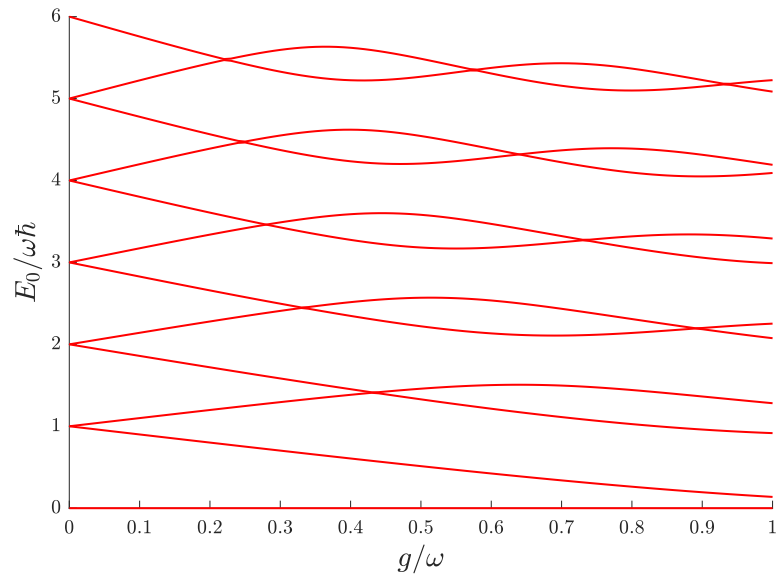
Ratkaistaan matriisin (19) ominaisarvot ja -tilat. Harmonisella värähtelijällä ei ole ylintä sallittua tilaa, vaan  $n$  voi olla jopa ääretön, niin myös matriisilla on äärettömän monta elementtiä. Matriisi täytyy katkaista ts. asettaa  $n$ :lle yläraja  $n_{\max}$ . Tästä voi herätä kysymys, vaikuttaako  $n$ :n katkaisu matriisin ominaisarvoihin ja -tiloihin. Kuvassa 1 on piirretty perustilan energia  $n_{\max}$ :n funktiona. Kuvasta nähdään, kuinka myös kytkentä vaikuttaa  $n_{\max}$ :n valintaan. Vahvempi kytkentä saa kytkemättömästä perustilasta kauempana olevien kantatilojen vaikuttamaan enemmän kytketyn systeemin perustilaan, joten suuremmilla kytkennän arvoilla täytyy matriisin kokoa kasvattaa. Joka tapauksessa, kun  $n_{\max} \geq 20$  perustilan energia pysyy vakiona jo vahvalle kytkennälle  $g/\omega = 2$ . Tällöin valitsemalla  $n_{\max} = 20$  perustilan energia ei pitäisi poiketa paljoa tilanteista, joissa harmoniselle värähtelijälle sallittaisiin enemmän tiloja välillä  $0 \leq g/\omega \leq 1$ .

Matriisin ominaisenergiat ja -tilat ovat ratkaistu Matlabilla. Tein funktion, joka rakentaa matriisin eri suureiden  $n$ ,  $g$ ,  $\omega_0$  ja  $\omega$  arvoilla. Matriisin ominaisarvot ja -tilat saadaan ratkaistua Matlabin funktiolla  $eig()$ .

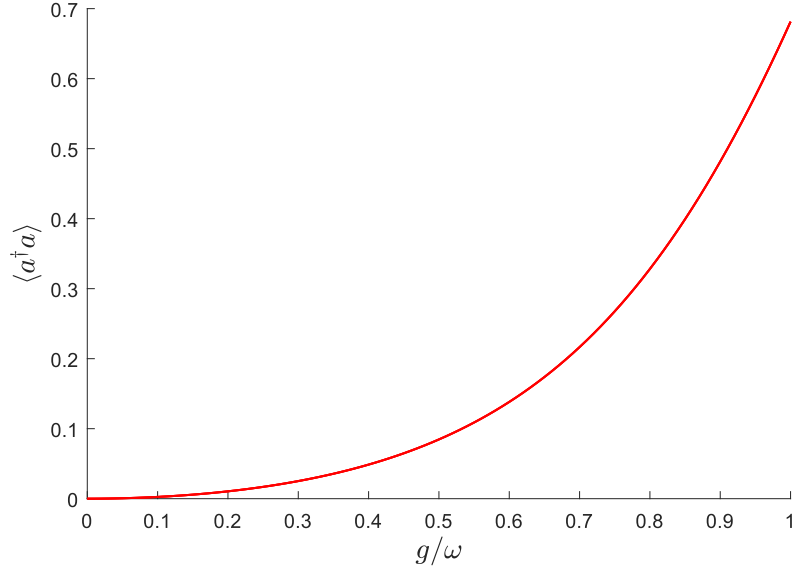
Kuvassa 2 esitetään matriisin ominaisarvot, eli systeemin energiatilat, kytkennän voimakkuuden  $g/\omega$  funktiona. Kytkentä rikkoo tilojen degeneraation, ts. mitattaessa kytketyn systeemin transitoenergioita, saadaan niitä lukumääräisesti enemmän kuin systeemistä, jossa kytkentää ei ole. Kuvassa 3 on odotusarvon  $\langle a^\dagger a \rangle$  riippuvuus kytkennästä. Odotusarvo on laskettu systeemin perustilassa. Tästä kuvasta nähdään, että kytketyssä systeemissä odotusarvo on nolasta poikkeava, eikä välttämättä kokonaisluku. Tästä seuraa, että systeemin perustilan on oltava tilojen  $|n\rangle$  superpositio. Odotusarvo  $\langle a^\dagger a \rangle$  voidaan ymmärtää harmonisen värähtelijän fotonien odotusarvona. Pienillä kytkennän arvoilla systeemin perustila on lähellä tilaa  $|a0\rangle$ .



Kuva 1: Matriisin katkaisun vaikutus perustilan energiaan eri kytkennän vahvuuksilla. Vahvempi kytkentä saa useamman kantatilan vaikuttamaan oleellisesti perustilaan, joten suurilla kytkennän arvoilla täytää matriisin kokoa kasvattaa. Kubitin ja harmonisen värähtelijän ominaistaajuudet ovat samat  $\omega = \omega_0$ .



Kuva 2: Systeemin stationaaristen tilojen energian riippuvuus kytkennän voimakkuudesta. Perustilan energia määrää energian nollatason. Energiat ovat matriisin (19) ominaisarvoja. Kubitin ja harmonisen värähtelijän ominaistaajuuudet ovat samat  $\omega = \omega_0$  ja  $n_{max} = 20$ .



Kuva 3: Odotusarvon  $\langle a^\dagger a \rangle$  riippuvuus kytkennästä perustilassa. Tämä voidaan myös ymmärtää harmonisen värähtelijän fotonien lukumäärän odotusarvoksi. Kubitin ja harmonisen värähtelijän ominaistaajuudet ovat samat  $\omega = \omega_0$  ja  $n_{max} = 20$ .

### 3.4 Rotating wave -approksimaatio

Jos oletetaan, että harmonisen värähtelijän taajuus  $\omega$  on hyvin lähellä kubitin taajuutta  $\omega_0$ , voidaan Hamiltonin operaattorissa (15) kytkentää kuvaavaa termiä sieventää. Eli oletetaan

$$\omega + \omega_0 \gg |\omega - \omega_0|. \quad (20)$$

Tällaista arviointia kutsutaan RWA:ksi [2], joka tulee sanoista *rotating wave approximation*. Tätä hyödyntäen voidaan arvioida kytkentää ja saada se yksinkertaisempaan muotoon

$$-\hbar g \sigma_x (a + a^\dagger) \approx -\hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (21)$$

Kaavaan (21) päästään tulkitsemalla kytkentä häiriöksi ja soveltamalla siihen ei-degeneroitunutta häiriöteoriaa. Ensimmäisessä kertaluvussa häiriön  $H'$  suhteen korjaus systeemin ominaistiloihin voidaan kirjoittaa muotoon [2]

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m^{(0)} | H' | \psi_n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |\psi_m^{(0)}\rangle, \quad (22)$$

jossa  $\psi_n^{(0)}$  viittaa systeemin häiriöttömiin ominaistiloihin ja  $E_n^{(0)}$  tällaisen tilan energiaan. Jätetään jatkossa häiriöttömien tilojen yläindeksi (0) merkitsemättä. Kirjoittamalla operaattori  $\sigma_x$  qubitin nosto- ja laskuoperaattoreiden (7) avulla voidaan kytkentä esittää muodossa

$$-\hbar g \sigma_x (a + a^\dagger) = -\hbar g (\sigma_- a + \sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a + \sigma_+ a^\dagger). \quad (23)$$

Nähdään, että vain sellaiset tilat  $|\sigma n\rangle$  ja  $|\sigma' m\rangle$  ovat kytkeytyneet, joissa  $\sigma \neq \sigma'$  ja  $m = n \pm 1$ . Siten kaavan (22) summasta jää vain jäljelle

$$\begin{aligned} |an^{(1)}\rangle &= -\hbar g \frac{\langle bn-1 | \sigma_+ a | an \rangle}{E_{an} - E_{bn-1}} |bn-1\rangle - \hbar g \frac{\langle bn+1 | \sigma_+ a^\dagger | an \rangle}{E_{an} - E_{bn+1}} |bn+1\rangle \\ &= -\frac{g\sqrt{n}}{\omega - \omega_0} |bn-1\rangle + \frac{g\sqrt{n+1}}{\omega + \omega_0} |bn+1\rangle \\ &\approx -\frac{g\sqrt{n}}{\omega - \omega_0} |bn-1\rangle, \end{aligned} \quad (24)$$

jossa viimeisen rivin sievennys seuraa oletuksesta (20). Koska kubitin ja harmonisen värähtelijän taajuuksien ollessa likimain yhtäsuuret, saa termi, jossa  $\omega - \omega_0$  on jakajassa hyvin suuren arvon verrattuna siitä seuraavaan termiin. Vastaavasti saadaan, että

$$|bn^{(1)}\rangle \approx \frac{g\sqrt{n+1}}{\omega - \omega_0} |an+1\rangle. \quad (25)$$

Häiriöteoria on tarkka vain kun häiriö ei ole kovin suuri, joten tässä täytyy myös olettaa, että kytkennän vahvuus on pieni  $g/\omega \lesssim 0.1$ . Häiriöteorian mukaiset korjaukset ominaisenergioihin ensimmäisessä ja toisessa kertaluvussa häiriön  $H'$  suhteen voidaan kirjoittaa muotoon

$$E_n^1 = \langle \psi_n | H' | \psi_n \rangle, \quad (26)$$

$$E_n^2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle \psi_m | H' | \psi_n \rangle|^2}{E_n - E_m}. \quad (27)$$

Kytke ei kytke toisiinsa samoja tiloja, joten ensimmäisessä kertaluvussa energioihin ei tule korjausta. Toisen kertaluvun korjaus energiaan on samaa muotoa kuin ensimmäisen kertaluvun korjaus ominaistilaan yhtälössä (22). Myös siinä oletuksesta (20) seuraa, että termien  $\sigma_- a$  ja  $\sigma_+ a^\dagger$  vaikutus katoaa. Kytkennän termien  $\sigma_- a$  ja  $\sigma_+ a^\dagger$  vaikutus systeemin ominaisarvoihin ja -tiloihin on mitätön verrattuna termeihin  $\sigma_+ a$  ja  $\sigma_- a^\dagger$ , joten arviointi (21) on perusteltu.

### 3.4.1 Ominaisenergiat ja perustila

Toisiinsa kytkettyä harmonista värähtelijää ja kubittia RWA:n kanssa on käsitelty luentomonisteissa [3]. RWA:ssa systeemin ominaisarvo-ongelma on ratkaistavissa analyyttisesti. Perustila koostuu pelkästään tilasta  $|a0\rangle$ , jossa kubitti sekä

harmoninen värähtelijä ovat omissa perustiloissaan ja sen energia on vakio kytkennän voimakkuuden suhteen, eli  $E_0 = -\hbar(\omega_0 - \omega)/2$ . Tällöin myös odotusarvo  $\langle a^\dagger a \rangle$  perustilassa on aina 0. Jotta odotusarvo voisi saada muita arvoja kuin 0, ovat termit  $\sigma_- a$  ja  $\sigma_+ a^\dagger$  hyvin tärkeitä. Ilman näitä tila  $|a0\rangle$  ei vuorovaikuta minkään muun tilan kanssa, vaan pysyy sellaisenaan. Kaava (18) laskettuna RW-approksimaatiolla saa muodon

$$H_{a/bn',a0} \approx -\frac{\hbar\omega_0}{2}\delta_{a/ba}\delta_{n'0} + \frac{\hbar}{2}\omega\delta_{a/ba}\delta_{n'0} - \hbar g\sqrt{n}\delta_{a/bb}\delta_{n'-1}.$$

Koska  $n' \geq 0$ , tästä ei voi jäädä jäljelle matriisiin muita kuin diagonaalisia termejä. Tämä myös tarkoittaa, että perustila ei kytkeydy mihinkään muuhun tilaan. Termit  $\sigma_- a$  ja  $\sigma_+ a^\dagger$  kytkevät tilan  $|a0\rangle$  tilaan  $|b1\rangle$ . Tämä tila kytkeytyy tilaan  $|a2\rangle$  termeillä  $\sigma_+ a$  ja  $\sigma_- a^\dagger$  ja taas eteenpäin termeillä  $\sigma_- a$  ja  $\sigma_+ a^\dagger$ . Termit  $\sigma_- a$  ja  $\sigma_+ a^\dagger$  aiheuttavat systeemin loputtoman kytkennän.

## 4 Perustilan kokeellinen tutkiminen

Teoreettisten tulosten kokeellinen todentaminen on tärkeää fysiikassa. Tässä kappaleessa käydään läpi tutkimusta [4] ja miten tällaisen systeemin perustilaa olisi mahdollista tutkia kokeellisesti. Yleisesti virittyneessä tilassa oleva systeemi voi siirtyä energieettisesti ylemmältä tilalta alempaan. Tällöin systeemi emittoi fotonin, jonka energia vastaa tilojen välistä energiaa. Tämän takia voidaan ymmärtää, että harmonisen värähtelijän tilassa  $|n\rangle$  on  $n$  fotonia. Pelkän harmonisen värähtelijän tapauksessa olisi mahdollista tutkia fotonien lukumäärää tällaisten emissioiden avulla. Emissio kuitenkin vaatii alemman energiatilan, koska emittoitunut foton vaatii energiaa. Emissiossa siis systeemistä poistuu energiaa. Tällainen lähestymistapa ei onnistu toisiinsa kytketyn harmonisen värähtelijän ja kubitin perustilan kanssa. Ongelma syntyy nimenomaan perustilasta. Systeemi ei pysty luovuttamaan emissioon vaadittavaa energiaa.

Tutkimuksen [4] systeemi on esitetty kuvassa 4. Se koostuu useasta kubitista kytkettynä harmoniseen värähtelijään. Tällaisen systeemin  $S$  perustilan tutkimista lähestyttiin kytkemällä ns. mittauskubitti systeemiin  $S$ . Tutkimuksessa huomattiin, että tätä mittauskubittia ajamalla, systeemi virittyy ja tämä viritysen energia riippuu systeemin  $S$  tilasta. Ajaminen saadaan aikaan lähettämällä mittauskubittiin säteilyä. Systeemin  $S$  perustilasta saataisiin uutta tietoa, jos virittämiseen tarvittava energia saataisiin selville. Viritysen energiaa voidaan tutkia havaitsemalla, millä säteilyn taajuudella viritys tapahtui. Tutkimuksessa tutkittiin useampaa mallia kubittien ja harmonisen värähtelijän kytkennälle, joista tärkein tämän työn kannalta on Dicken malli

$$H_{\text{Dicke}} = \omega_c a^\dagger a + \omega_0 J_z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a)(J_+ + J_-), \quad (28)$$

jossa  $\omega_c$  on harmonisen värähtelijän taajuus,  $\omega_0$  on jokaisen systeemin  $S$  kubitin tilojen energioihin liittyvä taajuus,  $N$  on kubittien lukumäärä ja  $\lambda$  kokonaiskytkentä kubittien ja harmonisen värähtelijän välillä. Operaattorit  $J_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)}$  ja  $J_\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_\pm^{(i)}$  sisältävät jokaiselle kubitille oman  $\sigma_z$ , nosto- ja laskuoperaattorin. Koko systeemin Hamiltonin operaattori on

$$H(t) = H_{\text{Dicke}} + \frac{\omega_M}{2} \sigma_z^{(M)} + g_M (a^\dagger + a) \sigma_x^{(M)} + \Omega_p \cos(\omega_p t) \sigma_x^{(M)}, \quad (29)$$

jossa indeksi  $M$  viittaa uuteen systeemiin kytkettyyn mittauskubittiin,  $\Omega_p$  on mittauskubittia ajavan kentän amplitudi ja  $\omega_p$  kentän värähtelyn kulmataajuus. Näissä kaavoissa (28) ja (29) on merkitty  $\hbar = 1$ .

Mittauskubitin ajaminen saa koko systeemin siirtymään perustilasta  $|G\rangle$  johonkin viritystilaan  $|I\rangle$ . Jotta viritys voi tapahtua, täytyy ajotaajuuden olla sama kuin

transitiotaajuuden. Fermin kultaisen säännön [2] mukaan siirtymisnopeus tässä tapauksessa määräytyy matriisielementistä

$$\left| \langle G | \sigma_x^{(M)} | l \rangle \right|^2. \quad (30)$$

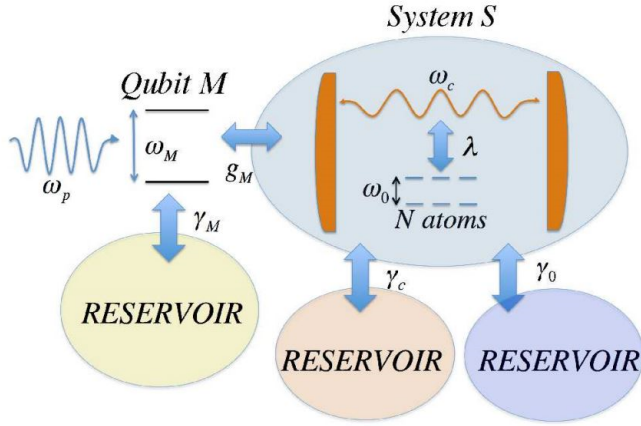
Mitä suurempi tämä termi on jollekin tilalle  $|l\rangle$ , sitä nopeampaa koko systeemi siirtyy perustilasta siihen. Valitsemalla mittauskubitin taajuus  $\omega_M = 2.75\omega_c$ , saadaan mittausten kannalta vain yksi merkittävä viritystila  $|l_m\rangle$ , joka on lähellä tilaa, jossa systeemi  $S$  on perustilassa ja mittauskubitti virittyneessä tilassa. Alla olevien kuvien musta viiva vastaa tätä tilaa. Kuvan 5 vasemmalla puolella nähdään, miten koko systeemin energia-arvot muuttuvat systeemin  $S$  kytkennän muuttuessa. Oikealla puolella nähdään, miten viritysentergia muuttuu systeemin  $S$  kubittien ja harmonisen värähtelijän kytkennän kasvaessa tilan  $|l_m\rangle$  suhteen. Kuvan 5 viivojen värin tummuus riippuu elementistä (30). Kuvassa 6 on piirretty viritysentergian muutos eri  $N$  arvoilla. Kuvasta nähdään, että viritysentergia muuttuu myös systeemille, jossa systeemissä  $S$  on vain yksi kubitti kytkettynä harmoniseen värähtelijään. Siten tutkimus yleistyy myös tämän tutkielman systeemiin. Tutkimuksessa johdettiin myös analyyttinen kaava viritysentergian muutokselle

$$\begin{aligned} \delta\omega_M^{\text{Dicke}} \approx & g_M^2 \left( \frac{1}{\omega_M - \omega_c} + \frac{1}{\omega_M + \omega_c} \right) \langle (a^\dagger + a)^2 \rangle \\ & + g_M^2 \left( \frac{1}{(\omega_M - \omega_c)^2} + \frac{1}{(\omega_M + \omega_c)^2} \right) \left\langle \frac{\lambda}{\sqrt{N}} (a^\dagger + a) J_x \right\rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

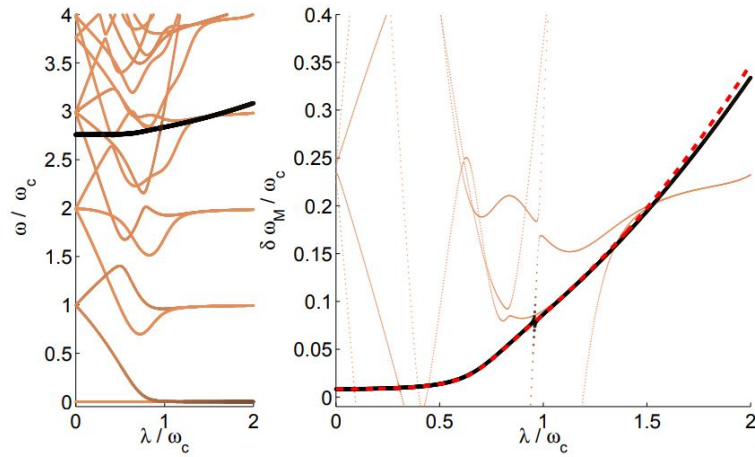
Kuvissa punainen katkoviiva on laskettu tällä yhtälöllä. Kaavan 31 odotusarvot lasketaan systeemin  $S$  perustilassa.

Systeemin  $S$  perustilassa harmonisen värähtelijän tilaa olisi mahdollista tutkia käyttämällä hyväksi kaavaa (31). Tätä voitaisiin verrata kokeellisesti mitattuihin viritysentergian arvoihin. Tutkimus on osoittanut, että mittauskubitti olisi hyvä työkalu systeemin  $S$  perustilan tutkimiseen.

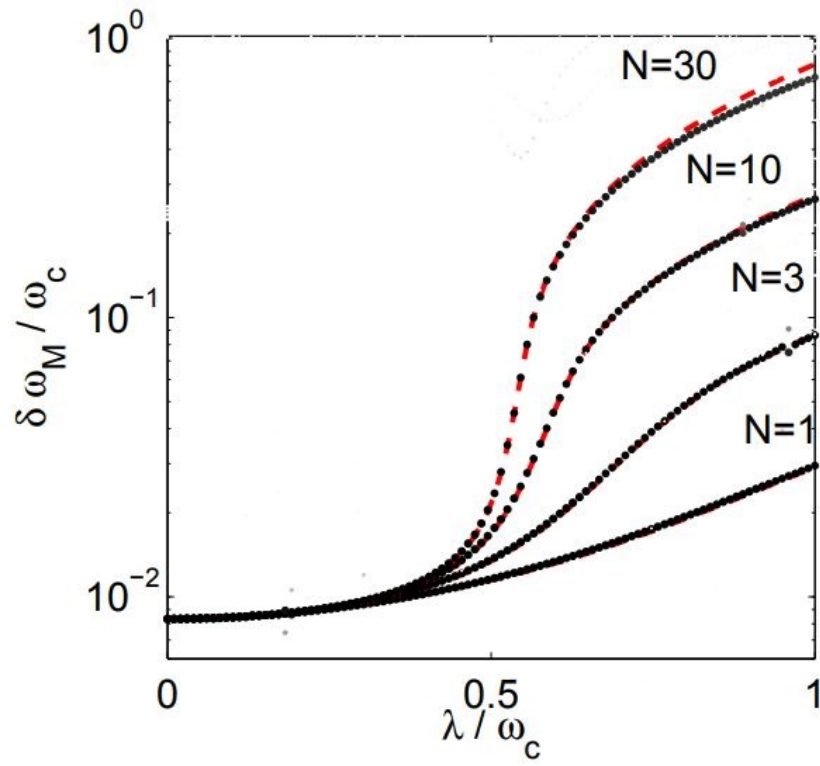




Kuva 4: Kubittien ja harmonisen värähtelijän muodostama kytketty systeemi  $S$ , sekä harmoniseen värähtelijään kytketty mittauskubitti  $M$ . Mittauskubitilla olisi mahdollista tutkia harmonisen värähtelijän tilaa, kun se on osa systeemiä  $S$ . Kuva tutkimuksesta [4].



Kuva 5: Vasemmalla on esitetty systeemin  $S$  ja mittauskubitin muodostaman systeemin tilojen ominaisenergiat kytkennän  $\lambda/\omega_c$  funktiona. Oikealla on esitetty koko systeemin virityksen muutos kytkennän voimakkuuden funktiona. Kuvissa musta viiva kuvaa mittauksille oleellisinta tilaa. Punainen viiva on laskettu kaavalla (31). Laskut ovat tehty parametreillä  $N = 3$ ,  $\omega_c = \omega_0$ ,  $\omega_M = 2.75\omega_c$ ,  $g_M = 0.1\omega_c$ . Kuva tutkimuksesta [4].



Kuva 6: Koko systeemin viritysenergian muutos kytkennän  $\lambda/\omega_c$  funktiona eri kubittien määrittä  $N$ . Laskut on tehty parametreillä  $\omega_c = \omega_0$ ,  $\omega_M = 2.75\omega_c$ ,  $g_M = 0.1\omega_c$ . Kuva tutkimuksesta [4].

## 5 Loppupäätelmät

Tässä tutkielmassa on tutustuttu kubitin ja harmonisen värähtelijän teoriaan ja näiden väliseen lineaariseen vuorovaikutukseen. Kubitin ja harmonisen värähtelijän välinen vuorovaikutus saa aikaan systeemin, jonka ominaistilat ovat lineaarikombinaatioita kytkemättömän systeemin ominaistiloista. Kytkentä rikkoo systeemin mahdollisen degeneroitumisen, sekä saa aikaan ilmiön, jossa systeemin ollessa perustilassa on mahdollista havaita harmonisessa värähtelijässä fotoneita. Tämä tulos on esitetty kuvassa 3. Tutkimuksessa [4] esitettiin mahdollinen tapa tutkia tätä ilmiötä. Siinä osoitettiin, että kytkemällä mittauskubitti harmonisen värähtelijän ja kubitin muodostamaan systeemiin, on mahdollista kokeellisesti tutkia harmonisen värähtelijän tilaa. Mittauskubittia voidaan ajaa, joka saa aikaan koko systeemin virittymisen. Virittymiseen vaadittava energia riippuu kaavan (5) mukaan harmonisen värähtelijän tilasta. Viritysendergia on kokeellisesti havaittavissa, joten sen kautta saadaan tietoa harmonisen värähtelijän tilasta.

Tutkielmassa on perehdytty vain yhteen tapaan tutkia kokeellisesti perustilan fotoneita ja tutkielmaa voisi laajentaa monella tavalla. Esimerkiksi tutkimuksessa [6] on käytetty hyväksi optomekaniikkaa perustilan tutkimiseen. Siinä kytketään mekaaniseen jouseen peili, johon fotonit törmäilevät ja saavat jousen värähtelemään. Jousen poikkeama lepopisteestä riippuu fotonien lukumäärästä, mitä tutkimuksen [6] mukaan voidaan käyttää perustilan fotonilukumäärän havaitsemiseen. Tutkielmassa ei ole kerrottu mittauskubitin hyvistä ja huonoista puolista. Uusien tutkimustapojen esittely ja niiden vertailu keskenään olisi hyvä tapa jatkaa tutkielmaa. Käytännön ja teorian yhdistäminen on mielestäni tärkeää. Tutkielma on hyvin teoriapohjainen, joten olisi hyvä perehtyä tarkemmin mahdollisiin tapoihin konkreettisesti rakentaa tällaisia systeemejä. Vielä yksi mahdollinen tapa jatkaa tutkielmaa olisi perehtyä toisiinsa vahvasti kytketyn kubitin ja harmonisen värähtelijän mahdollistamiin sovelluksiin.

## Viitteet

- [1] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta & F. Nori, *Ultrastrong coupling between light and matter*, [Nat. Rev. Phys. \*\*1\*\*, 19-40 \(2019\)](#).
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995).
- [3] E. Thuneberg, *Quantum Optics in Electric Circuits*, (Oulun yliopisto, 2017).
- [4] J. Lolli, A. Baksic, D. Nagy, V. E. Manucharyan & C. Ciuti, *Ancillary Qubit Spectroscopy of Vacua in Cavity and Circuit Quantum Electrodynamics*, [Phys. Rev. Lett. \*\*144\*\*, 183601 \(2015\)](#).
- [5] A. Montanaro, *Quantum algorithms: an overview*, [npj Quantum Inf. \*\*2\*\*, 15023 \(2016\)](#).
- [6] M. Cirio, K. Debnath, N. Lambert & F. Nori, *Amplified Optomechanical Transduction of Virtual Radiation Pressure*, [Phys. Rev. Lett. \*\*119\*\*, 053601 \(2017\)](#).